

L'UNIVERSO



SEDI DELL'IGM
IL COMPLESSO
DI SANTA CATERINA
A FIRENZE

FOTOGRAFIA
ECUADOR

IDROGEOLOGIA
IL FIUME BORMIDA

GEOGRAFIA E
LETTERATURA
GEOGRAFIE VENETE
NELLE PROSE
DI ROMANO PASCUTTO

PARCHI E
AREE NATURALI
PERCEZIONI E
TRASFORMAZIONI
NELLA COSTA TOSCANA

CARTOGRAFIA
STORICA
CONFLITTI
LIMINARI NELLA
LIGURIA DEL
SETTECENTO

ISTITUTO GEOGRAFICO MILITARE
FIRENZE

2

ANNO XCIX - N° 2 € 5,00

L'UNIVERSO

2019 APRILE - MAGGIO - GIUGNO

L'UNIVERSO



Rivista insignita di medaglia d'oro dalla Società Geografica Italiana nel 1999
e del
«Premio Giorgio Valussi» dell'Associazione Italiana Insegnanti di Geografia nel 2002



Aprile - Maggio - Giugno 2019 n° 2 ANNO XCIX



**Il Tipo per l'amicabile adeguamento
de limiti del Principato di Seborga (Liguria
Orientale) di Vinzoni e Bertola (1759):
produzione cartografica e conflitti liminari
nel Ponente Ligure del Settecento**

NICOLA GABELLIERI



**Variazione del fiume Bormida
nel tratto Cessole-Terzo in relazione
all'evento alluvionale del 1994**

FEDERICA GHIONE - LUISA PELLEGRINI -
LAURA TURCONI - GIOVANNI CARLO GHIONE



**Percezioni e trasformazioni
del paesaggio costiero toscano**

ELISA BAGNONI



**Geografie venete nelle prose
di Romano Pascutto**

EMANUELE POLI



Istantanee dall'Ecuador
GRAZIA BENVENUTI - MARCO PACE



Il complesso di Santa Caterina da Siena: da convento domenicano a sede dell'Istituto Geografico Militare
MARILENA TAMASSIA

Primo piano
Grandi Viaggi

Notizie

Libri

Strumenti

Geofilatelia

Prossimamente

316

320

324

337

340

347

349

In copertina:
mercato di Guamote
(fotografia di Marco Pace)



Direttore responsabile

Andrea Cantile

Redazione e grafica

Magg. Fabrizio Marconi
Funz. Alessandra Cristofari
Ass. Anita Panci
Ass. Giovanni Casini
Ass. Adele Monaco
Ass. Laura Guidi
Aus. Maria Letizia Compagnone
Aus. Mauro Marrani

Direzione e redazione

Istituto Geografico Militare,
Via Cesare Battisti, 10
50122 Firenze
055/2732242-233-614
GEOGRA08@igmi.191.it

Rivista del Ministero della Difesa

Editore Difesa Servizi S.p.A.

Fotolito: Officine IGM - Firenze
approvato per la stampa
in settembre 2019

Ufficio abbonamenti

Punto vendita dell'IGM: Viale Strozzi, 10 - 50129 Firenze
055/2732768 – fax 055/489867
casezcomm@geomil.esercito.difesa.it

Tipi di abbonamento

Cartaceo: € 25,00; Digitale: € 15; Cumulativo: € 30
Ridotto: € 19,00
(per sodalizi scientifici e loro soci, studenti, scuole medie superiori, università, personale in servizio del Ministero della Difesa).
Estero: € 30,00
Il prezzo è comprensivo dei quattro fascicoli più allegati e supplementi.

Cartaceo: versamento on-line, oppure sul conto corrente postale n. 315507 intestato a:
Istituto Geografico Militare, Amministrazione,
Via C. Battisti, 10, 50122 – Firenze (specificare l'anno).
Digitale: solo pagamento on-line tramite carta di credito su www.igmi.org

Pubblicazione trimestrale registrata presso il Tribunale di Firenze (n. 32 del 15 luglio 1948).

TUTTI I DIRITTI DI RIPRODUZIONE RISERVATI

ISSN:0042-049

L'esperimento del pendolo di Foucault nel Duomo di Firenze - 2ª parte

L'esperimento di Foucault

Leon Foucault eseguì l'esperimento in pubblico nel Pantheon di Parigi nel 1851, utilizzando un pendolo semplice. La lunghezza della corda del pendolo era 67 m, mentre la massa era circa 28 kg. Quando si esegue l'esperimento nell'emisfero boreale della Terra, si osserva che il piano di oscillazione del pendolo ruota, osservandolo dall'alto, in senso antiorario (da est ad ovest passando per il sud) con velocità angolare che dipende dalla latitudine λ del luogo. Già Viviani nel 1661 aveva evidenziato il risultato.

Calcoleremo adesso il movimento del pendolo, seguendo la classica dimostrazione di Sommerfeld¹.

Per semplicità si consideri un pendolo al polo Nord, con il punto O posto sull'asse terrestre e posizionato in modo che possa oscillare liberamente in qualsiasi direzione. Per prima cosa studiamo il moto del pendolo in un sistema di riferimento inerziale con origine in O, sia P la forza peso, verticale verso il basso e T la tensione del filo del pendolo. L'equazione del moto è:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{T} \quad (1)$$



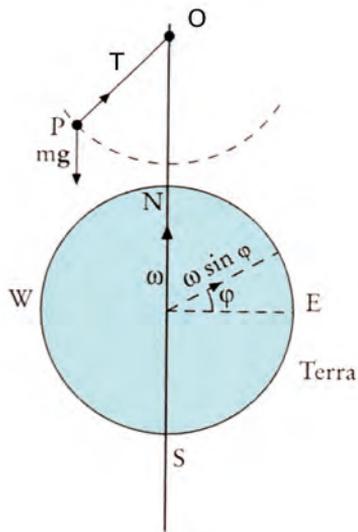
Leon Foucault.

In basso: il pendolo di Foucault, Siena, Liceo Scientifico Galileo Galilei.



¹SOMMERFELD A., *Lezioni di Fisica Teorica I, Meccanica*, pp. 179-182, Zanichelli, Bologna, 1984.

Il piano di oscillazione è fisso nel tempo; cominciano infatti le piccole oscillazioni da una situazione iniziale in cui la massa m è spostata dalla posizione di equilibrio (verticale N – S) e lasciata andare da ferma rispetto al laboratorio (in cui si esegue l’esperimento) solidale alla Terra. La velocità relativa iniziale è nulla. Essendo le oscillazioni molto piccole, lo spostamento dall’asse terrestre è assai limitato e la velocità di trascinamento relativamente al sistema può essere trascurata. Quindi la velocità iniziale assoluta (nel sistema inerziale) è praticamente nulla. I vettori \underline{v} , $\underline{OA} = \underline{r}$, $\underline{P} = m\mathbf{g}$ sono sempre complanari (si veda la figura sotto).



In un riferimento solidale con la Terra sulla massa del pendolo P agisce il peso mg , la tensione del filo T , la forza centrifuga e la forza di Coriolis, responsabile quest’ultima dello spostamento del pendolo dal piano di oscillazione e quindi della sua rotazione.

(ripresa da BORGIA B. e GRILLI M., Fisica Meccanica Termologia, Roma 2000).

Infatti moltiplichiamo la (1) scalarmente per $(\underline{r} \wedge \underline{P})$:

$$\underline{r} \wedge \underline{P} \cdot m \, d\underline{v} / dt = \underline{r} \wedge \underline{P} \cdot \underline{P} + \underline{r} \wedge \underline{P} \cdot \underline{I}$$

Poiché $\underline{r} \wedge \underline{P}$ è perpendicolare a \underline{P} e a \underline{T} , si ha di conseguenza:

$$m \, d\underline{v} / dt \cdot (\underline{r} \wedge \underline{P}) = 0 \tag{2}$$

da cui;

$$d[\underline{v} \cdot (\underline{r} \wedge \underline{P})] / dt = d\underline{v} / dt \cdot (\underline{r} \wedge \underline{P}) + \underline{v} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{P}) + \underline{v} \cdot [\underline{r} \wedge d\underline{P} / dt]$$

per la (2) e poiché $\underline{v} \cdot (\underline{v} \wedge \underline{P}) = 0$ e $[d\underline{P} / dt] = 0$,

si ottiene quindi:

$$\underline{v} \cdot (\underline{r} \wedge \underline{P}) = \text{costante} = 0 \tag{3}$$

poiché la velocità iniziale è nulla.

Segue che \underline{v} è perpendicolare a $(\underline{r} \wedge \underline{P})$ durante tutto il moto.

Quindi \underline{v} , \underline{r} , e \underline{p} sono sempre complanari ed il moto avviene in un piano fisso nel sistema inerziale scelto.

Al polo Nord (rispetto al sistema inerziale scelto) il piano di oscillazione è fisso e la Terra ruota sotto di esso. Per un osservatore solidale con la Terra il piano di oscillazione ruota in senso orario con la velocità angolare $\underline{\omega}$ di rotazione della Terra e quindi con un periodo di 24 ore circa. Quando il pendolo si trova alla latitudine λ , si ripete il ragionamento già visto, eccetto di considerare la componente della velocità angolare che ci interessa, di modulo $\omega \sin \lambda$.

Trattiamo adesso il problema di un sistema di riferimento non-inerziale solidale con la Terra.

Un pendolo semplice di lunghezza l è spostato dalla sua posizione verticale di equilibrio.

A B_0 , la massa oscillante B è abbandonata, con velocità nulla, nella posizione B' di coordinate $(0, y_0, z_0)$ in un sistema di riferimento terrestre B_0, x, y, z .

B_0 è l'origine del sistema, $B_0 x$ è tangente al parallelo di latitudine λ ed è diretto verso Est, $B_0 y$ è nel piano del meridiano ed è diretto verso Nord, $B_0 z$ è verticale ascendente. La Terra ruota con velocità angolare uniforme. $\Omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ attorno alla linea N S dei poli. Posto $a = \omega \sin \lambda$ e $b = (g/l)^{1/2}$. si farà l'approssimazione $a \ll b$. La massa del pendolo, di coordinate x, y, z al tempo t , è soggetta a due forze reali:

il peso $m g$ e la tensione \underline{T} della corda. Nel sistema B_0, x, y, z non inerziale si trascura la $-$ forza d'inerzia di trascinamento (al secondo ordine in ω) $F_i T = -m \underline{\omega} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{r})$ dove $\underline{r} = (B - A)$

L'equazione della dinamica è quindi:

$$m \underline{g} + \underline{T} + (-m \underline{a}_c) = m \underline{a} \quad (4)$$

dove:

$$\begin{aligned} \underline{g} &= (0, 0, -g), \quad \underline{T} = [-T x/l, -T y/l, T(l-z)/l] \\ \underline{\omega} &= (0, \omega \cos \lambda, \omega \sin \lambda), \quad \underline{a} = (d^2 x / dt^2, d^2 y / dt^2, d^2 z / dt^2) \\ \underline{a}_c &= 2 \underline{\omega} \wedge \underline{v} = 2 \omega \cos \lambda dz / dt, -2 \omega \sin \lambda dy / dt, 2 \omega \sin \lambda dx / dt, \\ &\quad -2 \omega \cos \lambda dx / dt \end{aligned}$$

Proiettando la (4) sui tre assi ortogonali si ottengono le tre equazioni del moto di B :

$$-T x/l - 2m \omega (\cos \lambda dz / dt - \sin \lambda dy / dt) = m d^2 x / dt^2 \quad (5)$$

$$-T y/l - 2m \omega \sin \lambda dx / dt = m d^2 y / dt^2 \quad (6)$$

$$-m g + T(l-z)/l + 2m \omega \cos \lambda dx / dt = m d^2 z / dt^2 \quad (7)$$

Nel caso di piccole oscillazioni, il moto di B ha luogo in pratica solo nel piano orizzontale.

$B_0 \times y$, quindi:

$$d^2 z / d t^2 = 0, d z / d t = 0, (l - z) / l = 1 - z / l \sim 1$$

La (5) e la (6) diventano

$$d^2 x / d t^2 - 2 \omega \operatorname{sen}(\lambda d y / dt) + (g x / l) = 0$$

$$d^2 y / d t^2 + 2 \omega \operatorname{sen}(\lambda d x / dt) + (g y / l) = 0$$

Per risolvere queste equazioni differenziali si consideri la quantità complessa

$$z = x + i y \quad i = (-1)^{1/2}$$

per cui $d^2 z / d t^2 = d^2 x / d t^2 + i d^2 y / d t^2$

Da (5) e (6) si ricava:

$$d^2 x / d t^2 + i d^2 y / d t^2 - 2 a (d y / dt - d x / dt) + b^2 (x + i y)$$

ossia

$$d^2 z / d t^2 + 2 a i d z / dt + b^2 z = 0 \quad (8)$$

La soluzione dell'equazione caratteristica è:

$$-i a \pm (i^2 a^2 - b^2)^{1/2} = -i a \pm i (a^2 + b^2)^{1/2} \sim -i (a \pm b).$$

trascurando $a^2 = \omega^2 \operatorname{sen}^2 \lambda$ (del secondo ordine in ω rispetto a $d a b^2$).

La soluzione di (7) è quindi:

$$z(t) = A_1 \exp[-i(a+b)t] * A_2 \exp[-(a-b)t]$$

A_1 e A_2 sono costanti complesse della forma

$$A_1 = \alpha_1 + i \beta_1, A_2 = \alpha_2 + i \beta_2$$

$x(t)$ rappresenta la parte reale di z :

$$x(t) = \alpha_1 \cos(a+b)t + \beta_1 \operatorname{sen}(a+b)t + \alpha_2 \cos(a-b)t + \beta_2 \operatorname{sen}(a-b)t \quad (9)$$

$y(t)$ rappresenta la parte immaginaria di z :

$$y(t) = -\alpha_1 \operatorname{sen}(a+b)t + \beta_1 \cos(a+b)t - \alpha_2 \operatorname{sen}(a-b)t + \beta_2 \cos(a-b)t \quad (10)$$

Le condizioni iniziali ($t = 0$: $x = d x / d t = 0$, $y = y_0$, $d y / d t = 0$) permettono di ottenere quattro equazioni:

$$1) - \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

$$2) -\beta_1(a+b) + \beta_2(a-b) = 0; \text{ trascurando } a \text{ rispetto a } b \rightarrow \beta_1 = \beta_2$$

$$3) -y_0 = \beta_1 + \beta_2 \rightarrow \beta_1 = \beta_2 = y_0 / 2;$$

$$4) -\alpha_1(a+b) - \alpha_2(a-b) = 0 \rightarrow 2 b \alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Quindi (8) e (9) diventano:

$$x(t) = y_0 / 2 \cdot [\operatorname{sen}(a+b)t + \operatorname{sen}(a-b)t] \rightarrow x(t) = y_0 \cos b t \operatorname{sen} a t$$

$$y(t) = y_0 / 2 \cdot [\cos(a+b)t + \cos(a-b)t] \rightarrow y(t) = y_0 \cos b t \cos a t$$

Il moto di B nel piano $B_0 \times y$ è quindi ellittico e può considerarsi la composizione di un moto rettilineo sinusoidale e di un moto circolare.

Posto

$$\underline{r} = r \underline{u} = x \underline{i} + y \underline{j} \quad (11)$$

con $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = y_0 \cos b t$ ed \underline{u} è un versore nella direzione di $B_0 B$, si ha:

$$\underline{r} = y_0 \cos b t \underline{u} = y_0 \cos b t [\sin a \underline{i} + \cos a \underline{j}] \quad (12)$$

dove $\underline{u} = \sin a \underline{i} + \cos a \underline{j}$

La relazione (10) mostra che B è animato da un moto relativo rettilineo sinusoidale di periodo

$$T = 2 \pi / b = 2 \pi [l / g]^{1/2} \quad (13)$$

secondo l'asse $B_0 B$ che ruota intorno ad O Z con un periodo dato, dalla (11), da

$$T' = 2 \pi / a = 2 \pi / (\omega \sin \lambda) \quad \text{essendo } T' \gg T \quad (14)$$

La rotazione del pendolo nell'emisfero Nord è in senso orario cioè da E o W e antiorario in quello Sud (da W ad E).

Latitudine	Periodo T' (tempo siderale)
90° (Polo Nord)	24 ore
80	24 h 22'
70	25 h 32'
60	27 h 43'
50	31 h 20'
40	37 h 20'
30	48 h 00'
20	70 h 10'
10	38 h 13'
0 (Equatore)	∞

Il piano di oscillazione del pendolo, alla latitudine λ , effettua una rivoluzione completa nel corso del tempo $T' = [2 \pi / (7,3 \cdot 10^{-5})] \cdot (1 / \sin \lambda)$.

Al polo Nord ($\lambda = \pi / 2$) il periodo della rivoluzione è $T' (\lambda = \pi / 2) = [2 \pi / (7,3 \cdot 10^{-5})] = 86400 \text{ s} = 24 \text{ h}$. Per $\lambda = 45^\circ$, il periodo diventa $T' (\lambda = \pi / 4) = 86400 \cdot (2^{1/2}) = 120960 \text{ s}$.
All'equatore ($\lambda = 0$) il periodo è infinito.

Nella precedente tabella viene riportata la durata della rotazione apparente del pendolo in funzione della latitudine:

Calcoliamo adesso l'espressione di dz/dt :

$$dz / dt = - a \{ [g / l] \exp(i\omega t) / [\omega^2 \sin^2 \lambda + g / l]^{1/2} \} \cdot \sin \{ [(\omega^2 \sin^2 \lambda + g / l) l]^{1/2} t \}$$

Da questa espressione si conclude che dz / dt , cioè la velocità del pendolo, si annulla tutte le volte che il seno che compare nella formula si annulla, ossia

$$dz / dt = 0, \text{ quindi } dx / dt = dy / dt = 0$$

Quando ciò accade si ha un estremo della traiettoria del pendolo, Tale situazione si verifica, con le condizioni iniziali scelte, per la prima volta quando $t = 0$, Ponendo allora:

$$\tau = 2 \pi / [(\omega^2 \sin^2 \lambda + g / l)]^{1/2} t \tag{15}$$

gli astremi successivi vengono raggiunti approssimativamente quando

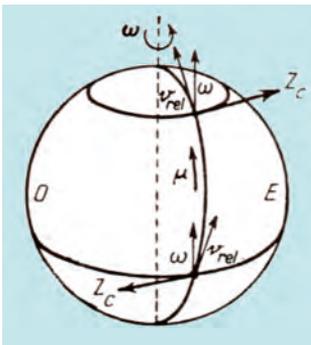
$$t = \pi / 2, t = \tau, t = 3 \tau / 2,$$

$t = \tau$ è quindi la durata di un movimento completo di andata e ritorno.

Se nella (15) poniamo $b = 0$, cioè $\omega = 0$, τ coincide con il periodo d'oscillazione del pendolo matematici, calcolato senza tener conto della rotazione della terra. Per vedere dove viene a trovarsi la nostra massa pendolare per effetto della rotazione della Terra, dopo un tempo $t = \tau$, ricaviamo dalla (9), tenendo conto delle (13) ed (11):

$$s(t = \tau) = A_1 \exp(-i u \tau + 2\pi i) A_2 \exp(-i u \tau - 2\pi i) = (A_1 * A_2) \exp(-u \tau) = a \exp(i u \tau).$$

La massa pendolare ha quindi dalla posizione di equilibrio la stessa distanza che aveva inizialmente, ma il suo azimut non giace più nel meridiano verso sud, come al principio dell'eperimento, ma è ruotato rispetto ad esso, verso ovest, di un angolo:



Un punto materiale si muove con velocità vrel costante lungo un meridiano della Terra; per un osservatore posto nel centro della Terra il punto possiede una velocità angolare μ , costante.

$$u \tau = 2 \pi u / [u^2 + g / l]^{1/2} \sim 2 \pi [(g / l) \omega \sin \lambda]^{1/2}$$

La rotazione nell'emisfero Nord viene effettuata da est. Possiamo ragionare così: la traiettoria del pendolo che, in assenza del moto rotatorio della Terra, si svolgerebbe tutta da Nord verso sud e viceversa, viene deviata dalla forza di Coriolis, equivalente ad una pressione contro la riva destra; durante il moto di andata la deviazione è verso est.

Emilio Borchì, Renzo Macii (Fondazione Osservatorio Ximeniano, Firenze)

